

# АЛГОРИТМ Понижения размерности разрешающей системы уравнений МКЭ при расчете транспортных сооружений на динамическое воздействие подвижной нагрузки

Стегнин М.Н. аспирант кафедры САПР

Научный руководитель – Нестеров И.В., к.т.н., доцент, САПР

При расчётах транспортных конструкций на действие подвижной нагрузки необходимо учитывать динамику взаимодействия искусственного сооружения с полем внешних нагрузок. В нормативных документах динамическая добавка к нагрузке задаётся набором динамических коэффициентов, зависящих от типа нагрузки геометрии искусственного сооружения и т.д. Далеко не всегда динамическое действие подвижной нагрузки корректно моделируется с использованием динамических коэффициентов, рекомендуемых нормами проектирования. Возможности современной вычислительной техники позволяют достаточно точно выполнять динамический анализ искусственных сооружений на действие любой подвижной нагрузки. Наиболее распространённым методом динамического анализа является прямое интегрирование уравнений движения конструкции [3]:

$$M * Z'' * (t + \Delta t) + C * Z' * (t + \Delta t) + R * Z * (t + \Delta t) = P * (t + \Delta t) \quad (1)$$

Составляющие уравнения (1) включают в себя стандартную матрицу жёсткости МКЭ (R), матрицу масс (M), матрицу демпфирования (C). Численная реализация процедуры интегрирования уравнений движения (1) позволяет выполнить её с использованием вычислительных процедур обычного конечно-элементного комплекса. В настоящее время в большинстве промышленных систем прочностного анализа используются неявные вычислительные схемы интегрирования уравнения движения. Неявными вычислительными схемами называются такие шаговые процедуры, которые требуют на каждом временном шаге решения системы алгебраических линейных уравнений. К неявным схемам следует отнести метод линейного ускорения [2], метод Ньюмарка [2], метод Вилсона [2] и различные их модификации. Эффективность применения неявной схемы во многом зависит от того, насколько близка к ленточной структуре матрица жесткости. Чаще эта матрица будет достаточно заполненной и потребует большого объема памяти. С увеличением порядка системы  $n$  этот объем будет расти пропорционально  $n^2$ . Однако при уменьшении шага интегрирования сходимость решения будет расти. Таким образом, чем выше порядок системы, тем точность решения выше, но времени и ресурсов компьютера будет потрачено намного больше.

В рамках предлагаемой работы был разработан алгоритм уменьшения шага интегрирования без увеличения порядка системы.

Рассмотрим из каких операций строится метод Ньюмарка [2]. Исходя из того, что начальные перемещения  $Z(t_{k-1})$ , скорость  $Z'(t_{k-1})$  и ускорения  $Z''(t_{k-1})$  известны из решения в конце предыдущего приращения времени, либо из начальных условий, строится разрешающая система уравнений (2) для определения перемещений  $Z(t_k)$ :

$$R_y * Z(t_k) = P_y(t_k) \quad (2), \text{ где}$$

$$R_y = \frac{4}{\Delta t^2} * M + R \quad (3)$$

$$P_{y\hat{e}} = P_y + M * \left( \frac{4}{\Delta t^2} * Z_{k-1} + \frac{4}{\Delta t} * Z'_{k-1} + Z''_{k-1} \right) \quad (4)$$

Вычисление перемещения:

$$Z_k = R_Y^{-1} * P_{y\dot{e}} \quad (5)$$

Вычисление скорости:

$$Z'_k = \frac{2}{\Delta t} * (Z_k - Z_{k-1}) - Z'_{k-1} \quad (6)$$

Вычисление ускорения:

$$Z''_k = \frac{2}{\Delta t^2} * (Z_k - Z_{k-1} - Z'_{k-1} * \Delta t) - Z''_{k-1} \quad (7)$$

Идея алгоритма заключается в следующем, выполнять расчет системы не только когда нагрузка приложена к узлам, но и когда находится между ними.

Рассмотрим алгоритм формирования вектора нагрузок.

1. Определяем положения силы в данный момент времени  $(t + \Delta t)$
2. Приводим текущую величину нагрузки к узловой (9)
3. Формируем вектор нагрузок
4. Выполняем расчет

Рассмотрим второй пункт подробнее. Для приведения нагрузки к узловой используется теорема о взаимности работ [1], которая гласит, что работа первой силы на перемещении точки ее приложения под действием второй силы равна работе второй силы на перемещении точки ее приложения под действием первой силы, т.е.

$$F_1 v_{12} = F_2 v_{21} \quad (8)$$

В результате получаем формулу для приведения к узловой нагрузке.

$$F_n = F * v(x) \quad (9), \text{ где}$$

$F$  - значение нагрузки,  $v(x)$  – функция формы конечного элемента.

Определяем положение силы и аппроксимируем ее значение через уравнения кривых.

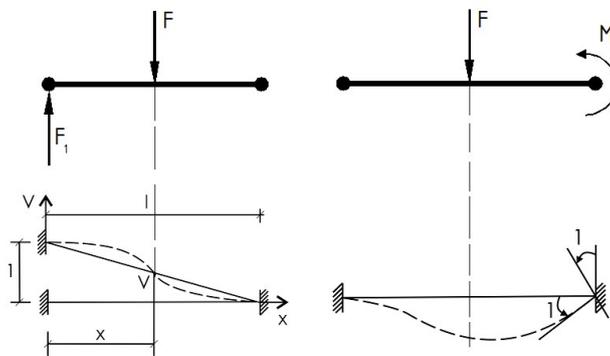


Рис 1. Приведение нагрузки к узловой.

	$v(x) = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}$
	$v(x) = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}$
	$v(x) = x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$
	$v(x) = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$

Таблица 1. Функции формы плоского стержня.

Таким образом получаем значения сил и моментов действующих на узел при данной нагрузке.

Тестирование алгоритма выполнялось на примере шарнирно опертой балки, данные для которой:

- $l=16.5$  м (длина балки)
- $E=206e9$  Н / м<sup>2</sup> (модуль упругости)
- $F=0.538e-2$  м<sup>2</sup> (площадь поперечного сечения)
- $I=0.984e-4$  м<sup>4</sup> (момент инерции)
- $\rho = 0.795e4$  кг/ м<sup>3</sup> (плотность материала)

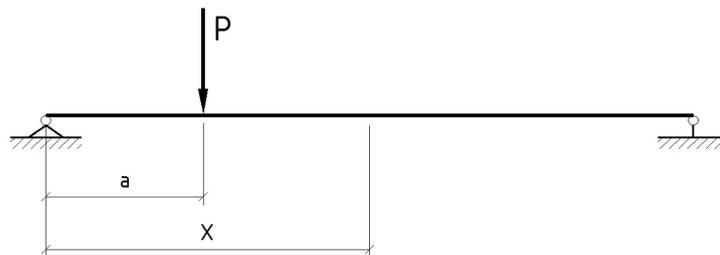


Рис 2. Расчетная схема.

Рассматривалось движение груза  $P = 1\text{Н} = 0,1$  кгс с постоянной скоростью  $V$ . За эталонное решение было принято решение предложенное акад. Крыловым А.Н. . Согласно этому решению прогиб для шарнирно опертой балки в сечении с координатой  $x$  и положением груза с координатой  $a$  выражением:

$$y(x, a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P\delta}{k^4(1-\beta_k^2)} \sin \frac{kx\pi}{l} \left( \sin \frac{ka\pi}{l} - \beta_k \sin \frac{ka\pi}{\beta_k l} \right) \quad (10), \text{ где } \beta_k = \frac{Vl}{k\pi \sqrt{\frac{EI}{m}}} \quad (11)$$

$\delta$  - прогиб среднего сечения балки от  $P = 0.1$  ,

$m$  - погонная масса.

Представлен график изменения прогиба в центральной точке при скорости  $93.6$  км/ч =  $2600$  см/с. Максимальный прогиб  $w = 5.02e - 6$  при  $a = 0.6625l$  .

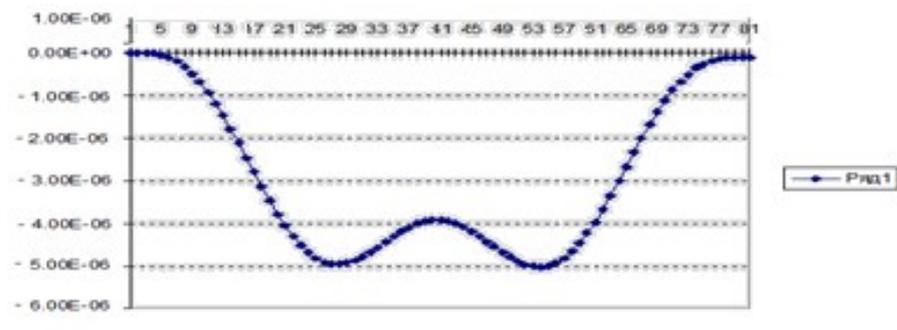


Рис. 3 Аналитическое решение

Результатами будут значения прогибов для среднего сечения балки. Все расчеты были выполнены в программе DIN\_Z, по методу конечных элементов с использованием метода Ньюмарка (2).

На графиках ниже представлены результаты при количестве шагов интегрирования 40, но с использованием алгоритма понижения размерности.



Рис. 3 Результат при количестве шагов интегрирования 40, с использованием алгоритма понижения размерности. Расчетная схема была разбита на 6 конечных элементов.



Рис. 4 Результат расчета при количестве шагов интегрирования 40, с использованием алгоритма понижения размерности. Расчетная схема была разбита на 10 конечных элементов.

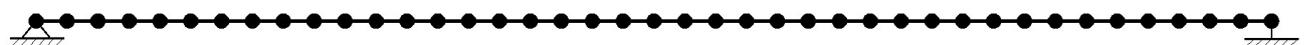


Рис. 5 Расчетная схема. Количество элементов 40.

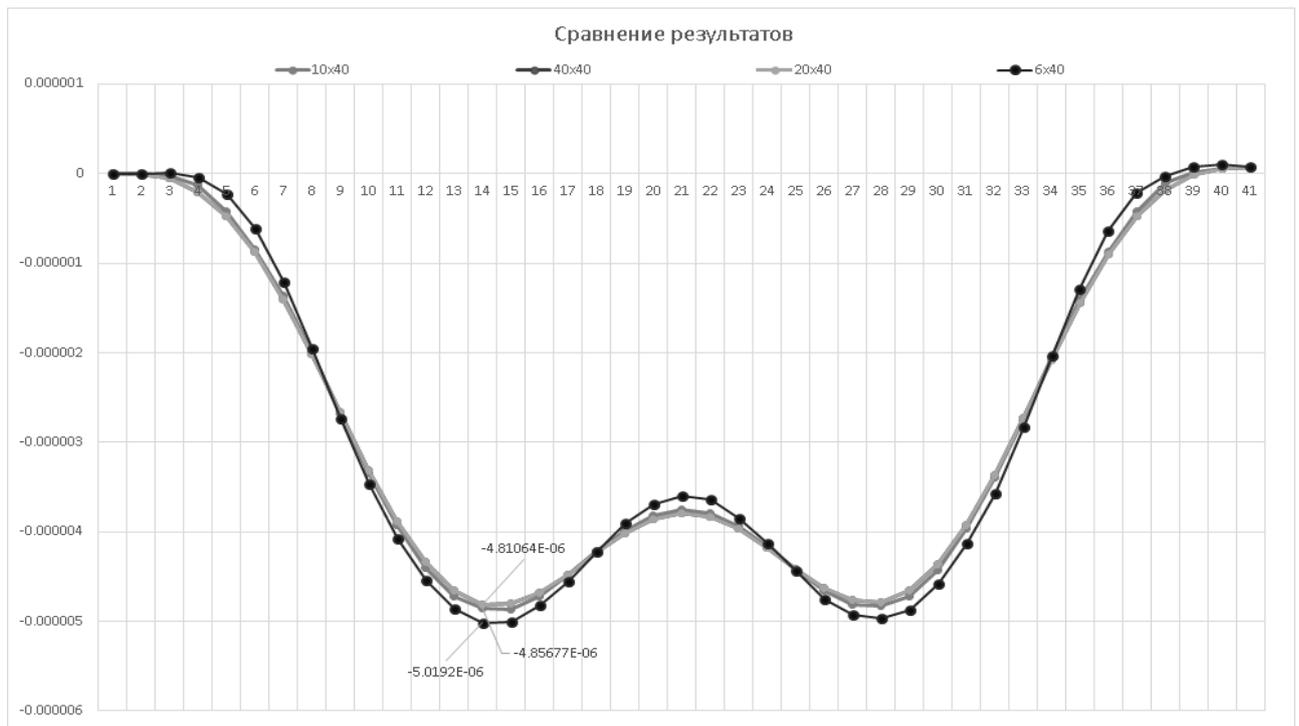


Рис 6. Сравнение результатов расчета с использование алгоритма понижения размерности. Обозначения: 10x40 – 10 конечных элементов, 40 шагов интегрирования

Из сравнения результатов (Рис. 6) видно, что при увеличении количества конечных элементов погрешность метода уменьшается. Отсюда можно сделать вывод, что разница перемещений связана с матрицей масс. Но даже при малом количестве конечных элементов сходимость алгоритма очень хорошая. Если рассмотрим результаты расчёта для 10 конечных элементов и 40, то погрешность составит менее 1%, а для 20 и 40 - перемещения совпадают.

В заключении можно сделать вывод, что разница между результатами с использованием алгоритма понижения и без использования очень мала. Таким образом, использование его сокращает время и потребляемые ресурсы компьютера, а сходимость решения остается устойчивой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дарков А.В, Шапошников Н.Н. Строительная механика: Учебник. 11-е изд., стер. – СПб.:Издательство «Лань», 2008. – 656 с.
2. Klaus Bathe, Edward Wilson. Numerical methods in finite element analysis. – М.: 1988. – 639 с.
3. В. А. Киселёв «Строительная механика» (Специальный курс) Динамика и устойчивость сооружений. Учебник для вузов, М.: Стройиздат, 1980. - 616 с.